Woche 4

Computer-Vektoren und Matrizen:

Wie speichern wir lineare Gleichungssysteme $Ax = b$?

$b \in \mathbb{R}^m$: **Array** b mit Einträgen b[0], b[1], ..., b[m-1].

$$b = \begin{bmatrix} b[0] \\ b[1] \\ \vdots \\ b[m-1] \end{bmatrix}$$

Computer-Vektor

Array-Indices starten bei 0, nicht bei 1!

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: Array mit Einträgen A[0], A[1], .., A[m-1]. Jedes A[i] ist ein Array mit n Einträgen.

$$A = \begin{bmatrix} — & A[0] & — \\ — & A[1] & — \\ & \vdots & \\ — & A[m-1] & — \end{bmatrix}$$

Computer-Matrix in Zeilennotation

$$A[i] = \begin{bmatrix} A[i][0] & A[i][1] & \cdots & A[i][n-1] \end{bmatrix}$$

Computer-Zeilenvektor

A[i][j] : Eintrag in Zeile i, Spalte j (beide beginnend bei 0)

$\sim a_{ij}$

Gauss-Elimination (3.2)

Algorithmus zum Lösen von $Ax = b$ mit quadratischen Matrizen ($m \times m$).

Rückwärtseinsetzung : wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist

Beispiel:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Gleichung	vor Einsetzung	nach Einsetzung	Lösung
1	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19$	$2x_1 + 11 = 19$	$x_1 = 4$
2	$5x_2 + 6x_3 = 17$	$5x_2 + 12 = 17$	$x_2 = 1$
3	$7x_3 = 14$	—	$x_3 = 2$

Fall $m \times m$:

Gleichung $i = m, m-1, \dots, 1$:
$$\sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_j = b_i$$

Wir kennen schon $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m$.

Auflösen nach x_i :
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j}{a_{ii}} .$$

Braucht $a_{ii} \neq 0$ für alle i !

! !

```
for (i = m-1; i >= 0; i--) {
    sum = b[i];
    for (j = i+1; j < m; j++)
        sum -= A[i][j] * x[j];
    x[i] = sum / A[i][i];
}
```

Computer Vektoren und Matrizen

Elimination: wenn A keine obere Dreiecksmatrix ist.

- $Ax = b \longrightarrow Ux = c$ (gleiche Lösungen, U ist obere Dreiecksmatrix)
- Löse $Ux = c$ mit Rückwärtseinsetzung

Beispiel:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 55 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Loswerden von Rot!

Loswerden von 4: ziehe 2·(Gleichung 1) von Gleichung 2 ab!

$$\begin{array}{lrcl} \text{Gleichung 2}: & 4x_1 + 11x_2 + 14x_3 &=& 55 \\ -2\,(\text{Gleichung 1}): & 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &=& 38 \\ \hline \text{Gleichung 2}': & 5x_2 + 6x_3 &=& 17 \end{array}$$

$\rightarrow A'x = b'$:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Das war eine Zeilensubtraktion:

Einschub: $x_3 = \dfrac{50 - 2x_1 - 8x_2}{17}$

$5x_2 + 6x_3 = 17$

$\vdots$

Zeilensubtraktion: lineare Transformation, angewendet auf alle Spalten von A, und auf b:

$$T_{E_{21}}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 2x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

Eliminationsmatrix

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

D.h. $A' = E_{21} A$ $\qquad$ $b' = E_{21}\, b$

Kann rückgängig gemacht werden:

$A = E_{21}' A'$ $\qquad$ $b = E_{21}'\, b'$

„addiere 2·(Gleichung 1) zu Gleichung 2"

Daraus folgt: $Ax = b$ und $A'x = b'$ haben die gleichen Lösungen.

wenn $Ax = b$, dann $\underbrace{E_{21} A}_{A'} x = \underbrace{E_{21} b}_{b'}$

wenn $A'x = b'$, dann $\underbrace{E_{21}' A'}_{A} x = \underbrace{E_{21}' b'}_{b}$

fat number: the **pivot**

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 55 \\ 50 \end{bmatrix}$$

subtract 2·(row 1) from (row 2):

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{21}A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \qquad E_{21}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 50 \end{bmatrix}$$

subtract 1·(row 1) from (row 3):

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{5} & 6 \\ 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad E_{31}E_{21}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 31 \end{bmatrix}$$

subtract 1·(row 2) from (row 3):

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{E_{32}E_{31}E_{21}A}_{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \qquad \underbrace{E_{32}E_{31}E_{21}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}$$

↑ elimination matrices

done! Now back substitution...

Zeilenvertauschungen: Falls Pivot = 0

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \cdots$$

elimination in first column:

$$E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad E_{31}E_{21}\mathbf{b} = \cdots$$

pivot **0**: exchange (row 2) and (row 3):

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{P_{23}E_{31}E_{21}A}_{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{5} & 13 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{P_{23}E_{31}E_{21}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}} = \cdots$$

↑ permutation matrix

done!

kann auch rückgängig gemacht werden, Lösungen bleiben gleich.

Scheitern:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 14 \\ 2 & 3 & 17 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \cdots$$

elimination in first column:

$$E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \qquad E_{31}E_{21}\mathbf{b} = \cdots$$

keine Zeilenvertauschung möglich, um Pivot ≠ 0 zu bekommen, gib auf!

Spezialfall des Scheiterns $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

```
for (j = 0; j < m; j++) {
    // eliminate in column j
    if (A[j][j] == 0) {
        // zero pivot, try row exchange
        k = j+1;
        while (k < m && (A[k][j] == 0)) k++;
        if (k == m)
            return false; // no row exchange is possible, give up
        else {
            // exchange rows j and k ...
            row_A = A[j]; A[j] = A[k]; A[k] = row_A; // ... of A
            row_b = b[j]; b[j] = b[k]; b[k] = row_b; // ... of b
        }
    }
    // create zeros below A[j][j]
    for (i = j+1; i < m; i++) {
        // subtract c * row j from row i ...
        c = A[i][j] / A[j][j];
        A[i][j] = 0;
        for (k = j+1; k < m; k++)
            A[i][k] -= c * A[j][k]; // ... of A
        b[i] -= c * b[j];            // ... of b
    }
}
return true;
```

Elimination code

aktuell $n = m$

Erfolg und Scheitern

„Lösungen bleiben gleich", allgemeiner Fall $m \times n$

$$Ax = b$$

„ziehe $c \cdot$ (Zeile j) von Zeile i ab" „vertausche Zeile j und k"

$$A'x = b'$$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & -c & & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}^{m\times m} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ j & i \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow j \\ \\ \leftarrow i \end{array} \qquad P_{jk} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & \ddots & \\ & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}^{m\times m} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ j & k \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow j \\ \\ \leftarrow k \end{array}$$

elimination matrix *row operation matrix* permutation matrix

Lemma 3.3: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$

eine Zeilenoperationsmatrix, $A' = MA$, $b' = Mb$.
Dann haben $Ax = b$ und $A'x = b'$ die gleichen Lösungen.

Beweis: M kann rückgängig gemacht werden; ....(tbc) durch eine Matrix M' (addiere $c \cdot$ (Zeile j) zu Zeile i, oder vertausche Zeile j und k). Das heisst, $A' = MA$, $b' = Mb$ und $A = M'A'$, $b = M'b'$.
$Ax = b \Leftrightarrow A'x = b'$ folgt wie im 3×3-Fall.

Korollar 3.4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Zeilenoperationsmatrix, $A' = MA$, $b' = Mb$. A hat linear unabh. Spalten gdw A' linear unabh. Spalten hat.

Beweis: Benutze Lemma 3.3 mit $b = 0$:
$Ax = \underbrace{0}_{b}$ und $A'x = \underbrace{0}_{b'}$ haben die gleichen Lösungen.

$$\underbrace{\begin{array}{l}\text{Nur } x = 0\\ \text{Andere } x\end{array} : \text{beide haben linear } \begin{array}{l}\text{unabh. Spalten}\\ \text{abhängige Spalte}\end{array}}_{\text{Beob. 3.2.}}$$

Theorem 3.5. Sei $Ax = b$ ein System von

m Gleichungen in m Variablen. Die Folgenden Aussagen sind äquivalent:

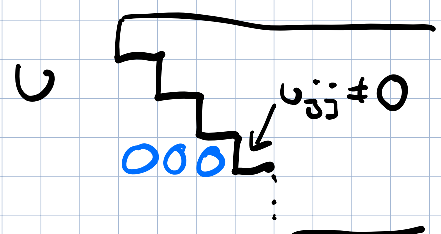
(i) Gauss-Elimination hat Erfolg.

(ii) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Beweis: wir zeigen (i) $\Rightarrow$ (ii) und $\underbrace{\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)}$

sagt das gleiche wie (ii) $\Rightarrow$ (i)

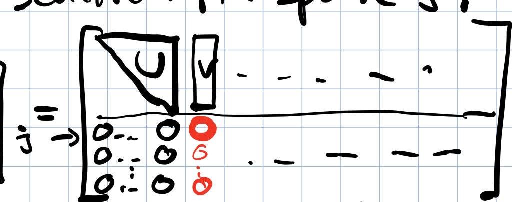
(i) $\Rightarrow$ (ii) Wenn Gauss Erfolg hat, dann $A \to U$, obere Dreiecksmatrix mit $u_{jj} \neq 0$ für alle j. U hat linear unabh. Spalten (Keine ist Linearkombination der vorherigen; Korollar 1.20)



Also hat auch A linear unabh. Spalten (Korollar 3.4)

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii): Wenn Gauss scheitert, in Spalte j:

$$A \to \ldots \to A' = \left[\begin{array}{c|c|c} U & v & \cdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots \end{array}\right]$$



$U \in \mathbb{R}^{(j-1)\times(j-1)}$, obere Dreiecksmatrix, alle $u_{\ell\ell} \neq 0$

$v \in \mathbb{R}^{j-1}$

Konstruiere $x \neq 0$ mit $A'x = 0$; dann hat A' (und damit auch A) linear abh. Spalten; Beob. 3.2)

Konstruktion: Setze $x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_m = 0$.

Wähle $x_1, x_2, \dots x_j$ so, dass

$$\underbrace{U \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \end{bmatrix}}_{y} + \underbrace{x_j}_{-1} v = 0$$

Löse $Uy = v$ (Rückwärtseinsetzung)

Dann haben wir

$$A'x = \left[\begin{array}{c|c|c} U & v & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} U & v \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix}}_{\neq 0 \text{ wegen } x_j = -1.} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

nach Wahl von $x_1 \dots x_j$

Laufzeit (Anzahl arithmetische Operationen: $-, /, \cdot$)

$$\frac{2}{3} m^3 + \frac{3}{2} m^2 + \frac{7}{6} m = O(m^3).$$

Inverse Matrizen (3.3)

Zeilenop.-matrix

do	undo	do & undo	$A=I$	undo & do	$A'=I$
$A'=MA$	$A=M'A'$	$A=M'\underbrace{MA}_{A'}$	$M'M=I$	$A'=M\underbrace{M'A'}_{A}$	$MM'=I$

Def. 3.7. Sei M eine $m\times m$ Matrix. M heisst <u>invertierbar</u> („undoable"), falls es eine $m\times m$ Matrix M^{-1} gibt (die Inverse von M) gibt, so dass
$$MM^{-1}=M^{-1}M=I.$$

Fall 1×1: $M=[a] \Rightarrow M^{-1}=\left[\frac{1}{a}\right]$ (Falls $a\neq0$)

Fall 2×2:
$$M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
(falls $ad-bc\neq0$)

Die Inverse ist eindeutig!

Lemma 3.8: Sei M eine $m\times m$ Matrix mit zwei Inversen A und B. Dann gilt $A=B$.

Beweis:
$$\underline{A}=IA=(BM)A=B(MA)=BI=\underline{B}.$$

Lemma 3.9: Seien A und B invertierbare $m\times m$ Matrizen. Dann ist auch AB invertierbar, und
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Lemma 3.10: Sei A eine invertierbare $m\times m$

Matrix. Dann ist die transponierte Matrix A^T invertierbar, und

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Theorem 3.11: Sei A eine $m \times m$ Matrix. Die Folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $Ax = b$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung x.

(iii) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) wenn A invertierbar, dann ist $x = A^{-1}b$ eine Lösung: $A(\underbrace{A^{-1}b}_{x}) = (\underbrace{AA^{-1}}_{I})b = b$

Eindeutigkeit: nimm ein x mit $Ax = b$. Dann gilt $x = \underbrace{A^{-1}A}_{I}\overbrace{Ax}^{b}$ $= A^{-1}b$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wenn $Ax = b$ immer eindeutig lösbar ist, dann auch für $b = 0$. Dann hat A linear unabh. Spalten (Beob. 3.2)

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seien x, x' Lösungen von $Ax = b$
$\Rightarrow Ax = Ax' = b \Rightarrow A(x - x') = 0$. Da die Spalten von A linear unabh. sind, gibt es nur

eine Lösung, nämlich $x - x' = 0 \Rightarrow x = x'$

(Existenz der Lösung ??)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn $Ax = b$ für alle b eine eindeutige Lösung hat, dann auch für

$b = e_1, e_2, \ldots e_m$ (Standard-Einheitsvektoren).

Das heisst, es gibt $v_1, v_2, \ldots v_m$:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad Av_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{I} \Rightarrow AB = I$$

Brauchen noch: $BA = I$.

Übung 3.12: Wenn $BA = I$, dann auch $AB = I$ (und umgekehrt)